

Nama : Mohammad Febryan Khamim

NRP : 5002221072

26/9
2024

Tugas Aljabar Linier (c)

- 2). misal $\{v_1, v_2, v_3\}$ dan $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ bebas linier. Selidiki apakah $\{v_1+v_2, v_2+v_3, v_3+v_1\}$ bebas linier!

Jawab : Akan dibuktikan $\{v_1+v_2, v_2+v_3, v_3+v_1\}$ bebas linier.

maka haruslah :

$$\alpha_1(v_1+v_2) + \alpha_2(v_2+v_3) + \alpha_3(v_3+v_1) = 0$$

$$\text{dan nilai } \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

$\Rightarrow$ Persamaan dapat diubah menjadi :

$$(\alpha_1 + \alpha_3)v_1 + (\alpha_1 + \alpha_2)v_2 + (\alpha_2 + \alpha_3)v_3 = 0$$

Karena diketahui $\{v_1, v_2, v_3\}$ bebas linier, maka,

$$\Rightarrow \alpha_1 + \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_1 = -\alpha_3$$

$$\Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

$$\alpha_2 = -\alpha_1 = \alpha_3$$

$$\Rightarrow \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

Karena $\alpha_2 = \alpha_3$, maka

$$\alpha_2 + \alpha_2 = 0$$

$$2\alpha_2 = 0$$

$$\alpha_2 = 0$$

Karena $\alpha_2 = 0$, maka $\alpha_2 = -\alpha_1 = \alpha_3 = 0$

Akibatnya terbukti bahwa $\{v_1+v_2, v_2+v_3, v_3+v_1\}$

Bebas linier

- 1). Diberikan $V = P^2(x) = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_i \in \mathbb{R}\}$.
 $S \subseteq V$, $S(x) = \{b_0 + b_1x + b_2x^2 \mid b_i \in \mathbb{R}\}$ dengan
 $S(2) = S(3) = 0$. Selidiki apakah S subruang dari V .
Jika iya, dapatkan dimensinya. Jika tidak, berikan penyangkal. Jelaskan

Jawab : Subruang harus memenuhi syarat :

- Untuk $r, s \in \mathbb{R}$, maka $r, s \in S$
- Untuk $S_1, S_2 \in S$, maka $S_1 + S_2 \in S$

$\Rightarrow$ Akan dibuktikan $r, s \in S$

$$\Rightarrow r(b_0 + b_1x + b_2x^2)$$

$$= r.b_0 + (r.b_1)x + (r.b_2)x^2$$

Karena perkalian 2 bilangan real menghasilkan bil. real juga, maka terbukti $r, s \in S$.

$\Rightarrow$ Akan dibuktikan $S_1 + S_2 \in S$

$$\text{ambil } S_1 = \{c_0 + c_1x + c_2x^2 \mid c_i \in \mathbb{R}\}$$

$$S_2 = \{d_0 + d_1x + d_2x^2 \mid d_i \in \mathbb{R}\}$$

$$S_1 + S_2 = (c_0 + c_1x + c_2x^2) + (d_0 + d_1x + d_2x^2) \\ = (c_0 + d_0) + (c_1 + d_1)x + (c_2 + d_2)x^2$$

Karena penjumlahan sembarang 2 bilangan real menghasilkan bilangan real, maka $(c_i + d_i) \in \mathbb{R}$. Sehingga, dapat terbukti $S_1 + S_2 \in S$.

$\therefore S(x)$ merupakan sub ruang dari V

$\Rightarrow$ Menentukan dimensinya

$$\Rightarrow S(2) = b_0 + 2b_1 + 4b_2 = 0$$

$$\Rightarrow S(3) = b_0 + 3b_1 + 9b_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2R_2 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow c_0 - 6c_2 = 0$$

$$c_0 = 6c_2$$

$$\Rightarrow c_1 + 5c_2 = 0$$

$$c_1 = -5c_2$$

$$\Rightarrow \text{Dimensi} = 1$$

$$3). \text{ Diberikan } H = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

1. Dapatkan himpunan bagian H yang bebas linier dengan membentuk kombinasi liniernya sama dengan nol. Dan buktikan koefisien-koefisiennya dipenuhi hanya oleh nol.

$\Rightarrow$ Untuk tentukan himpunan bagian H yang bebas linier $\rightarrow$ OBE-kan hingga eselon baris tereduksi. Himpunan vektor yang bebas linier adalah vektor pada kolom yang memiliki n -utama & yang lain nol.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-R_1 + R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-R_2 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Diperoleh bahwa $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ bebas linear, sedangkan $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ tidak, karena dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear vektor lain.

b. Tunjukkan H tidak membangun $\mathbb{R}^3$
(berikan contoh penyangkal).

Dari hasil OBE pada (a), maka jelas H tak membangun $\mathbb{R}^3$ karena tak Bebas Linier.

* Contoh penyangkal :

$$\text{Vektor} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Diperoleh persamaan :

$$\begin{aligned} \rightarrow 2k_1 + 2k_2 &= 1 \\ k_1 + k_2 &= \frac{1}{2} \dots (i) \end{aligned}$$

$$\rightarrow k_1 + -k_2 + 2k_3 = 2$$

$$\rightarrow k_1 + k_2 = 3 \dots (ii)$$

Karena persamaan (i) dan (ii) saling kontradiktif, maka tidak ada k_1, k_2 , dan k_3 yang memenuhi. Akibatnya vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, yang merupakan salah satu vektor $\mathbb{R}^3$, tak dapat dibangun oleh H.

$\therefore$ H tak membangun di $\mathbb{R}^3$

c. Perluas H sehingga menjadi basis untuk $\mathbb{R}^3$, jelaskan teknik pengambilannya!
untuk menentukan vektor tambahan, hasil perluasan H, vektor tersebut harus memenuhi :

• v bebas linier dengan vektor lain di H
maka v harus bukan kombinasi linier H,

$$k_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k_1 + 2k_2 \\ k_1 - k_2 \\ k_1 + k_2 \end{bmatrix}$$

maka agar tak kombinasi linier, ambil saja

$$v = \begin{bmatrix} 2k_1 + 2k_2 + 1 \\ k_1 - k_2 \\ k_1 + k_2 \end{bmatrix}, \text{ lalu substitusi } k_1 = 1, k_2 = 2$$

$$v = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} //$$

Sehingga himpunan hasil perluasan yang membangun

$$\mathbb{R}^3 \text{ adalah : } \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

4). Diberikan U, V subruang $\mathbb{R}^3$ dengan :

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, V = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

a. Dapatkan basis U dan dimensinya!

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_3 \leftrightarrow B_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-B_3 + B_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{B_2 \leftrightarrow B_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_1 + B_3} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-B_2 + B_3} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi, diperoleh bahwa basis dari U adalah

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \text{ dengan dimensi} = 2$$

b. Dapatkan basis V dan dimensinya!

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_1 \leftrightarrow B_2} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-B_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{2B_1 + B_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-B_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_1 + B_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_2 + B_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Diperoleh basis } V = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \text{ dengan dimensi} = 2 //$$

c). Dapatkan basis $U+V$ dan dimensinya!

$$U+V = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_2 \leftrightarrow B_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_1 + B_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_2 \leftrightarrow B_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-B_3 + B_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-B_2 + B_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}B_3 + B_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}B_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Sehingga, diperoleh basisnya adalah } \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

dengan dimensinya = 3 //

4). d. Dapatkan basis $U \cap V$ dan dimensinya
 $U \cap V$ tidak ada karena tak ada irisan
antara U dan V

$$\text{Dimensi } (u+v) = \dim(u) + \dim(v) - \dim(u \cap v)$$

$$\dim(u \cap v) = \dim(u) + \dim(v) - \dim(u+v)$$

$$= 2 + 2 - 3$$

$$\dim(u \cap v) = 1$$

Jadi, $\dim(u \cap v) = 1$